



# Применение интегрального преобразования Фурье при расчёте конструкций



Артём КОСАУРОВ

Artem P. KOSAUROV

**Use of Fourier Integral Transform in Calculation of Structures**  
(текст статьи на англ. яз. – English text of the article – p. 55)

**В работе представлен метод получения системы линейных уравнений, описывающей конечный элемент в стержневой системе.**

**При решении используется интегральное преобразование Фурье и обобщённые функции. Граничные условия на концах конечного элемента определяются из теоремы Винера–Пэли–Шварца. Применение метода при расчёте балочных, вантовых и экстрадозных мостов позволяет задавать любые виды нагрузок без замены их какими-либо эквивалентными.**

*Ключевые слова:* мост, пролётное строение, железобетонная конструкция, метод конечных элементов, обобщённые функции, дифференциальное уравнение балки Тимошенко, интегральное преобразование Фурье, теорема Винера–Пэли–Шварца.

*Косауров Артём Петрович – аспирант кафедры «Мосты и тоннели» Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ), Москва, Россия.*

**А**бсолютное большинство расчётов балочных, вантовых и экстрадозных мостов производится с использованием метода конечных элементов (МКЭ). Метод этот основан на разбиении рассчитываемой конструкции на некоторое число малых, но конечных по размерам элементов – конечных элементов (КЭ) и замене дифференциальных уравнений, описывающих ее напряженно-деформированное состояние системой алгебраических линейных уравнений.

Несмотря на свои широкие возможности, МКЭ обладает рядом недостатков [1, с. 39]:

- 1) Для каждого конечного элемента нужно составлять свою матрицу жёсткости.
- 2) Распределенные нагрузки необходимо заменять эквивалентными обобщенными узловыми силами.
- 3) Сосредоточенные силы нужно прикладывать в узлах.
- 4) Приходится проводить дополнительные расчёты для получения значений изгибающего момента и поперечной силы на границах конечного элемента.
- 5) Необходимо разбивать конструкцию на мелкие конечные элементы с целью обеспечения точности расчёта.

В случае, если рассчитываемую конструкцию можно заменить стержневой системой, данные недостатки можно устранить. Для этого следует получить систему линейных уравнений, описывающую конечный элемент, при помощи интегрального преобразования Фурье, финитных обобщенных функций [4, 6] и теоремы Винера–Пэли–Шварца. Подробности метода представлены в диссертации Е. Н. Курбацкого [5].

В своей работе Е. Н. Курбацкий использовал метод при построении конечного элемента для балки на упругом основании без учёта продольной силы и поперечного сдвига.

В статье рассмотрен пример нахождения типового конечного элемента железобетонной балки пролетного строения моста:

- с учётом продольной силы и влияния сдвига;
- без учёта продольной силы.

### 1.

Получим систему уравнений, описывающую конечный элемент, изображенный на рис. 1. Для этого необходимо использовать дифференциальное уравнение балки Тимошенко, которое учитывает влияние продольной силы и сдвига на прогиб [5]:

$$EI \frac{d^4 u}{dx^4} + P_i \frac{d^2 u}{dx^2} = q(x) + \frac{k}{GA} EI \frac{d^3 Q_x}{dx^3}, \quad (1)$$

где  $G$  – модуль деформации;

$A$  – площадь поперечного сечения;

$k$  – безразмерный коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения [7]. Для прямоугольного сечения:

$$k = \frac{12 + 11\nu}{10(1 + \nu)}. \quad (2)$$

Уравнение (1) следует представить в финитных обобщенных функциях. Для этого

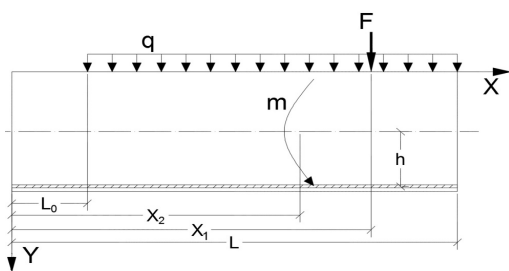


Рис. 1.

запишем функцию прогиба и функцию поперечной силы:

$$\bar{U}(x) = u(x)[H(x) - H(x-l)]; \quad (3)$$

$$\bar{Q}(x) = Q(x)[H(x) - H(x-l)], \quad (4)$$

где  $H(x)$  – функция Хевисайда.

Тогда уравнение (1) принимает следующий вид [2, 3]:

$$\begin{aligned} EI \frac{d^4 \bar{U}}{dx^4} + P_i \frac{d^2 \bar{U}}{dx^2} = & EI \frac{d^4 \bar{u}}{dx^4} [H(x) - H(x-l)] + \\ & + P_i \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} [H(x) - H(x-l)] - \\ & - EI n \frac{d^3 \bar{Q}_x}{dx^3} [H(x) - H(x-l)] + Q(x)\delta(x) - \\ & - Q(x)\delta(x-l) + M(x)\delta'(x) - M(x)\delta'(x-l) + \\ & + EI \phi(x)\delta''(x) - EI \phi(x)\delta''(x-l) + \\ & + EI u(x)\delta'''(x) - EI u(x)\delta'''(x-l) + \\ & + P(\phi(x)\delta(x) - \phi(x)\delta(x-l) + \\ & + u(x)\delta'(x) - u(x)\delta'(x-l)) - \\ & - EI n(Q(x)\delta''(x) - Q(x)\delta''(x-l) + \\ & + Q'(x)\delta'(x) - Q'(x)\delta'(x-l)), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{где } n = \frac{k}{GA}. \quad (6)$$

В уравнении (5) используется свойство дельта-функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-t)dx = f(t). \quad (7)$$

Воздействие преднапрягаемой арматуры на балку представим в виде изгибающих моментов  $m$ , приложенных в точке обрыва арматуры и продольной сжимающей силы  $P$ .

Обозначим правую часть уравнения (5), представляющую собой обобщенную нагрузку  $S(x)$ , а  $\frac{P_i}{EI} = K_i^2$ , тогда:

$$\frac{d^4 \bar{U}}{dx^4} + K_i^2 \frac{d^2 \bar{U}}{dx^2} = \frac{S(x)}{EI}. \quad (8)$$

Применим преобразование Фурье к обоим частям уравнения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{d^4 \bar{U}}{dx^4} + K_i^2 \frac{d^2 \bar{U}}{dx^2} \right] e^{inx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(x)}{EI} e^{inx} dx. \quad (9)$$

Получим [2]:

$$\tilde{U}(v)[v^4 - K^2 v^2] = \frac{\tilde{S}(v)}{EI}, \quad (10)$$

где  $\tilde{U}(v)$  – изображение Фурье функции  $U(x)$ ;

$\tilde{S}(v)$  – изображение Фурье обобщенной нагрузки  $S(x)$ ;



$v$  – параметр преобразования Фурье.

Для составления системы уравнений рассматриваемого нами конечного элемента надо найти изображение Фурье обобщенной нагрузки [2, 3]:

$$\begin{aligned} \tilde{S}(v) = & q\left(\frac{e^{ivl} - e^{ivl_0}}{iv}\right) + Fe^{ix_1} + m(-iv)e^{ix_2} + \\ & + Q(0) - Q(l)e^{ivl} + M(0)(-iv) - M(l)(-iv)e^{ivl} + \\ & + EI\phi(0)(-iv)^2 - EI\phi(l)(-iv)^2 e^{ivl} + EIl u(0)(-iv)^3 - \\ & - EIl u(l)(-iv)^3 e^{ivl} + P_1(\phi(0) - \phi(l)e^{ivl} + \\ & + u(0)(-iv) - u(l)(-iv)e^{ivl}) - nEI(Q(l)v^2 e^{ivl} - \\ & - Q(0)v^2 + qiv(e^{ivl} - e^{ivl_0}) + \frac{F}{a}iv(e^{iv(x_1+a)} - e^{iv(x_1-a)})). \end{aligned} \quad (11)$$

Поскольку в данном методе учитывается влияние сдвига, то сосредоточенные силы следует представить распределенными нагрузками, действующими в окрестностях точек приложения соответствующих сосредоточенных сил. Длину участков принимают равной половине высоты сечения балки на данном участке. Это необходимо делать только в том слагаемом уравнения (11), которое отвечает за учёт сдвига под действием сосредоточенной силы, а именно:

$$\frac{F}{a}iv(e^{iv(x_1+a)} - e^{iv(x_1-a)}). \quad (12)$$

Из уравнения (10) получим:

$$\tilde{U}(v) = \frac{1}{EI} \frac{\tilde{S}(v)}{v^4 - K^2 v^2}. \quad (13)$$

Теорема Винера–Пэли–Шварца для обобщенных функций позволяет найти неизвестные, поскольку, согласно ей, функция  $U(v)$  должна быть целой и, следовательно, числитель, представляющий собой сумму целых функций, будет содержать в себе нули знаменателя [4, 6].

Должны выполняться условия:

$$S(v_j) = 0, \quad j = 1, 3, 4; \quad (14)$$

$$S'(v_j) = 0, \quad j = 2, \quad (15)$$

где  $v_j$  – корни выражения

$$v^4 - K^2 v^2 = 0. \quad (16)$$

Найдем эти корни (рис. 2):

$$v_{1,2} = 0, \quad v_3 = K, \quad v_4 = -K. \quad (17)$$

Подставляя найденные корни в уравнение (11), получим систему, состоящую из четырех уравнений и описывающую один конечный элемент, изображенный на рис. 1:

$$\begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} & C_{1,4} & C_{1,5} & C_{1,6} & C_{1,7} & C_{1,8} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} & C_{2,4} & C_{2,5} & C_{2,6} & C_{2,7} & C_{2,8} \\ C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} & C_{3,4} & C_{3,5} & C_{3,6} & C_{3,7} & C_{3,8} \\ C_{4,1} & C_{4,2} & C_{4,3} & C_{4,4} & C_{4,5} & C_{4,6} & C_{4,7} & C_{4,8} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q(0) \\ Q(l) \\ M(0) \\ M(l) \\ \phi(0) \\ \phi(l) \\ u(0) \\ u(l) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & G_{1,3} \\ G_{2,1} & G_{2,2} & G_{2,3} \\ G_{3,1} & G_{3,2} & G_{3,3} \\ G_{4,1} & G_{4,2} & G_{4,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ F \\ m \end{bmatrix}; \quad (18)$$

$$C_{1,1} = 1 + nEIv_j^2$$

$$C_{2,1} = 2nEIv_j$$

$$C_{1,2} = -e^{ivl} - nEIv_j^2 e^{ivl}$$

$$C_{2,2} = -ile^{ivl} - 2nEIv_j e^{ivl} - nEIv_j^2 ile^{ivl}$$

$$C_{1,3} = -iv$$

$$C_{2,3} = -i$$

$$C_{1,4} = ive^{ivl}$$

$$C_{2,4} = ie^{ivl} - lve^{ivl}$$

$$C_{1,5} = -EIv^2 + P$$

$$C_{2,5} = -2EIv$$

$$C_{1,6} = EIv^2 e^{ivl} - Pe^{ivl}$$

$$C_{2,6} = 2EIve^{ivl} + EIv^2 ile^{ivl} - Pile^{ivl}$$

$$C_{1,7} = Eliv^3 - Piv$$

$$C_{1,7} = 3Eliv^2 - Pi$$

$$C_{1,8} = -Eliv^3 e^{ivl} + Pive^{ivl}$$

$$C_{1,8} = -3Eliv^2 e^{ivl} + Ellv^3 e^{ivl} + Pie^{ivl} - Pive^{ivl}$$

$$G_{1,1} = \left(\frac{e^{ivl} - e^{ivl_0}}{iv}\right) + nEIv(e^{ivl} - e^{ivl_0})$$

$$G_{2,1} = i \frac{e^{ivl} - e^{ivl_0}}{v^2} - i \frac{ile^{ivl} - il_0 e^{ivl_0}}{v} + \quad (19)$$

$$+ nEI(ie^{ivl} - lve^{ivl} - ie^{ivl_0} + l_0 ve^{ivl_0})$$

$$G_{1,2} = e^{ix_1}$$

$$G_{2,2} = ix_1 e^{ix_1}$$

$$G_{1,3} = -ive^{ix_2}$$

$$G_{2,3} = -ie^{ix_2} + vx_2 e^{ix_2}.$$

Различие между первым, третьим и четвертым уравнениями состоит только в множителе  $v_j$ .

Поскольку корни  $v_{1,2}$  всегда равны нулю, то надо вместо множителя при  $q$  записыв-

вать (20) для первого уравнения и (21) – для второго:

$$\lim_{v \rightarrow 0} \left( q \frac{e^{ivl} - e^{ivl_0}}{iv} \right) = q(1 - l_0); \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow 0} \left( qi \frac{e^{ivl} - e^{ivl_0}}{v^2} - qi \frac{ile^{ivl} - il_0 e^{ivl_0}}{v} \right) = \\ = qi \left( \frac{l^2}{2} - \frac{l_0^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Таким образом, система уравнений, описывающая один конечный элемент, имеет вид:

$$CU = -GN. \quad (22)$$

Сравним результаты расчёта балки, полученные с использованием программного комплекса Midas Civil, и данного метода. В качестве примера рассмотрим железобетонную преднапрягаемую балку длиной 50 м прямоугольного сечения 2x0,3 м на двух опорах, нагруженную распределенной нагрузкой интенсивностью  $q = 1\text{т/м}$  и сосредоточенной силой  $F = 10\text{ т}$ , приложенной на расстоянии  $x_1 = 0,25L$  от края балки.

На рис. 3 ось ординат соответствует расхождению в расчётах, выраженному в процентах, а ось абсцисс – усилию в продольной преднапрягаемой арматуре, выраженному в тоннах. В случае, если прогиб балки стремится к нулю, расхождение достигает значительных величин. На графике это видно на участке, где продольная сила 325 т. Однако следует учитывать, что во всех остальных случаях, когда прогиб составляет  $u = L/2500 \div L/400$ , расхождение оказывается не более полупроцента, что позволяет получать точные решения при расчёте реальных конструк-

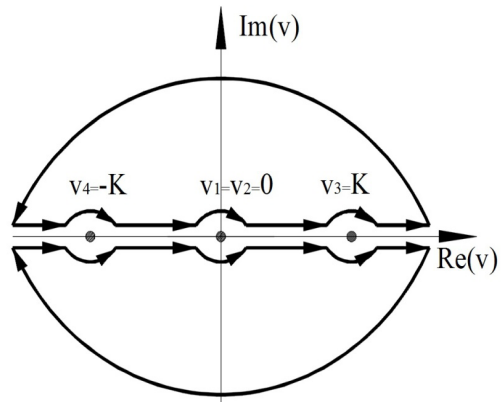


Рис. 2.

ций. Кроме того, следует отметить, что расхождение в изгибающем моменте и поперечной силе при любых значениях продольной силы дает ошибку менее процента.

## II.

Когда нет необходимости учитывать продольную силу, система уравнений принимает значительно более простой вид.

Дифференциальное уравнение прогиба балки:

$$EI \frac{d^4 u}{dx^4} = q(x) + \frac{k}{GA} EI \frac{d^3 Q_x}{dx^3}. \quad (23)$$

После преобразования Фурье получим:

$$\tilde{U}(v)[v^4] = \frac{\tilde{S}(v)}{EI}; \quad (24)$$

$$\tilde{U}(v) = \frac{1}{EI} \frac{\tilde{S}(v)}{v^4}; \quad (25)$$

$$v^4 = 0. \quad (26)$$

Изображение Фурье обобщенной нагрузки (27):

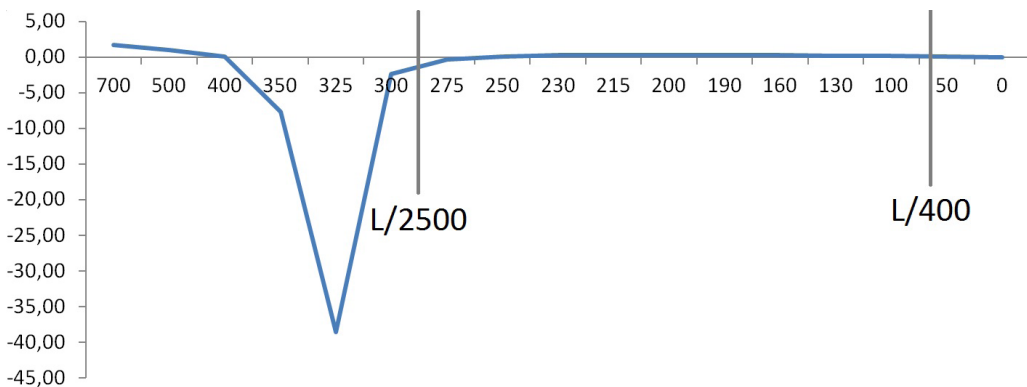


Рис. 3.



$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -il & -i & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2nEI & l^2 - 2nEI & 0 & -2l & -2EI & 2EI & 0 & 0 \\ 0 & il^3 - 6nEIl & 0 & -3il^2 & 0 & 6EIl & 6EIi & -6EIi \end{bmatrix}; \quad (30)$$

$$G = \begin{bmatrix} (1-l_0) & 1 & 0 \\ i\left(\frac{l^2}{2} - \frac{l_0^2}{2}\right) & ix_1 & -i \\ \left(-\frac{l^3}{3} + \frac{l_0^3}{3}\right) - 2nEI(1-l_0) & -x_1^2 & 2x_2 \\ i\left(-\frac{l^4}{4} + \frac{l_0^4}{4}\right) - 3inEI(l^2 - l_0^2) & -ix_1^3 & 3ix_2^2 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}(v) = & q\left(\frac{e^{ivl} - 1}{iv}\right) + Fe^{ivx_1} + m(-iv)e^{ivx_2} + \\ & + Q(0) - Q(l)e^{ivl} + M(0)(-iv) - M(l)(-iv)e^{ivl} + \\ & + EI\phi(0)(-iv)^2 - EI\phi(l)(-iv)^2 e^{ivl} + \\ & + Elu(0)(-iv)^3 - Elu(l)(-iv)^3 e^{ivl} - nEI(Q(l)v^2 e^{ivl} - \\ & - Q(0)v^2 + qiv(e^{ivl} - 1)). \end{aligned} \quad (27)$$

Найдем корни уравнения:

$$v_{1,2,3,4} = 0. \quad (28)$$

Должны выполняться условия:

$$\tilde{S}(v_1) = 0, \quad \dot{\tilde{S}}(v_2) = 0, \quad \ddot{\tilde{S}}(v_3) = 0, \quad \dddot{\tilde{S}}(v_4) = 0. \quad (29)$$

Матрицы С и G принимают следующий вид: (30), (31).

Данная модель удобна прежде всего тем, что нет надобности каждый раз подставлять в матрицы С и G значения  $v_{1,2,3,4} = 0$ , как в системе уравнений (18). Преимуществом модели является и то, что матрица С получается разреженной.

## ВЫВОДЫ

1. Применение полученных систем уравнений при расчёте балочных, вантовых и экстрадозных мостов позволяет задавать любые виды нагрузок без необходимости замены их эквивалентными нагрузками.

2. Используемый метод не требует дополнительного разбиения конструкции на конечные элементы с целью получения точного решения в случае, если момент инерции постоянен.

3. Матрица С – эквивалент матрицы жёсткости в методе конечных элементов

неизменна для всех конечных элементов в случае, когда нет продольной нагрузки. Если же её учёт необходим, то в матрицу нужно подставить значения найденных корней уравнения

$$v_{1,2} = 0, v_3 = \sqrt{\frac{P_i}{EI}}, v_4 = -\sqrt{\frac{P_i}{EI}}.$$

4. В методе построения системы линейных уравнений, ориентированной на конечный элемент в стержневой системе, за неизвестные принимаются перемещение, угол поворота сечения, изгибающий момент и поперечная сила на концах конечного элемента. Это позволяет сразу найти точное значение данных переменных без необходимости проведения дополнительных расчётов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Carroll W. F. A primer for finite elements in elastic structures / Carroll W. F. Weaver & Johnston. – 1998. – P. 512.
2. Dean G. D. Advanced Engineering Mathematics / CRC Press. – 1997. – P. 656.
3. Osgood B. The Fourier Transform and its Applications / Stanford University. – 2009. – P. 428.
4. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: 1979. – 320 с.
5. Курбацкий Е. Н. Метод решения задач строительной механики и теории упругости, основанный на свойствах изображений Фурье финитных функций / Дис... док. техн. наук. – М., 1995. – 205 с.
6. Лазарян В. А., Конашенко С. И. Обобщенные функции в задачах механики. – Киев: Наукова думка, 1974. – 189 с.
7. Тимошенко С. П. Прочность и колебания элементов конструкций. – М.: Наука, 1975. – 704 с. ●

Координаты автора: **Косауров А. П.** – artkp14@mail.ru.

Статья поступила в редакцию 14.03.2016, принята к публикации 16.06.2016.

# USE OF FOURIER INTEGRAL TRANSFORM IN CALCULATION OF STRUCTURES

Kosaurov, Artem P., Moscow State University of Railway Engineering (MIIT), Moscow, Russia.

## ABSTRACT

This paper presents a method to obtain a system of linear equations describing a final element in the frame structure. In solution process integral Fourier transform and generalized functions are used. The boundary conditions at the

ends of the finite element are determined by the theorem of Paley–Wiener–Schwartz. Application of the method for calculation of beam, cable-stayed bridges and extradosed bridges allows to set all kinds of loads without replacing them with any equivalent.

**Keywords:** bridge, superstructure, reinforced concrete structure, finite element method, generalized functions, differential equation of Timoshenko beam, integral Fourier transform, theorem of Paley–Wiener–Schwartz.

**Background.** The vast majority of calculations of beam, cable-stayed and extradosed bridges are performed using the finite element method (FEM). This method is based on decomposition of a calculated design into a number of small but finite in size elements – finite element (FE) and replacement of differential equations describing its stress-strain state with a system of linear algebraic equations.

Despite its broad capacities, FEM has a number of disadvantages [1, p. 39]:

1) For each of a final element it is necessary to constitute a matrix of rigidity.

2) Distribution of the load must be replaced by equivalent generalized nodal forces.

3) Concentrated forces should be applied at the nodes.

4) It is necessary to carry out additional calculations to obtain the values of a bending moment and shear forces on the borders of the finite element.

5) It is necessary to divide the design into small finite elements in order to ensure calculation accuracy.

If a calculated design can be replaced by a frame system, these disadvantages can be eliminated. To do this, it is necessary to get a system of linear equations describing the finite element, using integral Fourier transform, finite generalized functions [4, 6] and theorem of Paley–Wiener–Schwartz. Details of the method are presented in the thesis of E. N. Kurbatsky [5].

In his work, E. N. Kurbatsky used the method in construction of finite element for a beam on an elastic foundation without taking into account longitudinal force and transverse shear.

The article describes an example of finding the model finite element of reinforced concrete beam of bridge superstructure:

– Taking into account longitudinal and shear forces impact;

– Without taking into account longitudinal forces.

**Objective.** The objective of the author is to consider use of Fourier integral transform in calculation of structures.

**Methods.** The author uses general scientific and engineering methods, mathematical apparatus, graph construction, analysis.

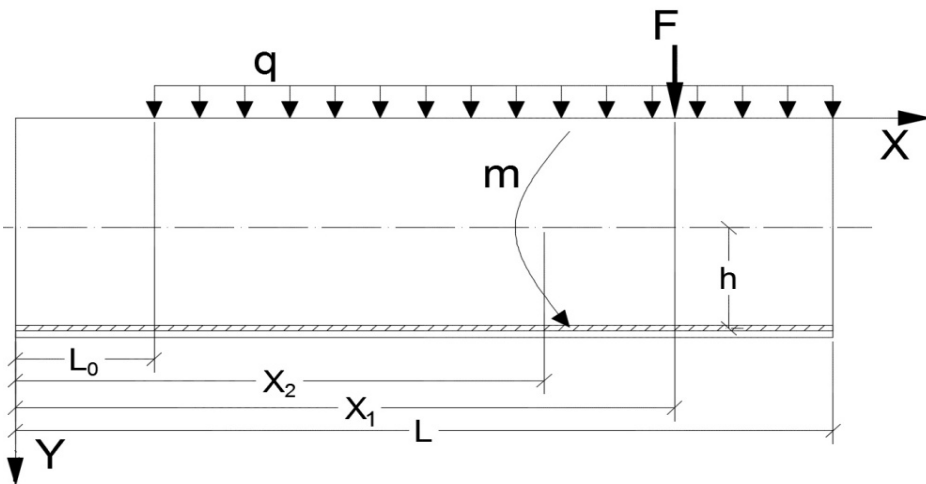
**Results.**

I.

We obtain a system of equations describing the finite element shown in Pic. 1. To do this, we use the differential equation of Timoshenko beam, which takes into account the effect of longitudinal and shear forces on the deflection [5]:

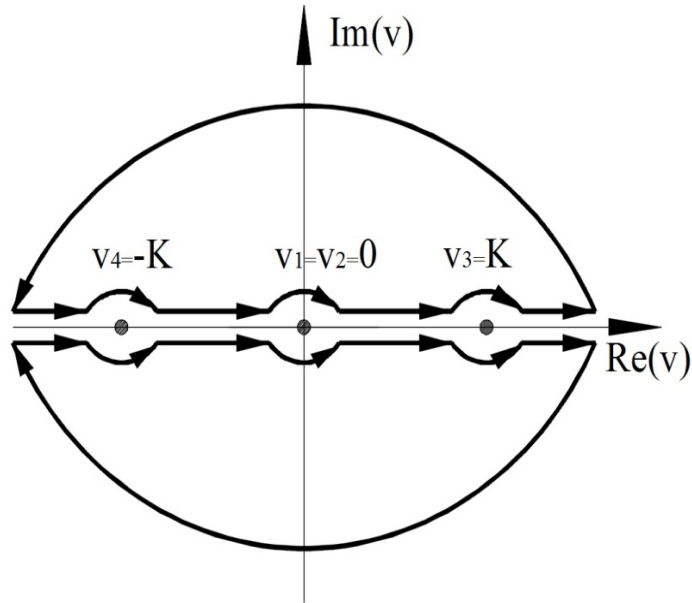
$$EI \frac{d^4 u}{dx^4} + P_i \frac{d^2 u}{dx^2} = q(x) + \frac{k}{GA} EI \frac{d^3 Q_x}{dx^3}, \quad (1)$$

where  $G$  is deformation module;



Pic. 1.

Pic. 2.



$A$  is area of cross-section;  
 $k$  is dimensionless coefficient that depends in the shape of cross-section [7]. For a rectangular cross-section:

$$k = \frac{12 + 11\nu}{10(1 + \nu)} \quad (2)$$

The equation (1) should be represented in finite generalized functions. To do this, we write the deflection function and the function of lateral force:

$$U(x) = u(x)[H(x) - H(x-l)]; \quad (3)$$

$$\bar{Q}(x) = Q(x)[H(x) - H(x-l)], \quad (4)$$

where  $H(x)$  is Heaviside function.  
 Then the equation (1) gets the following form [2, 3]:

$$\begin{aligned} EI \frac{d^4 U}{dx^4} + P_i \frac{d^2 U}{dx^2} &= EI \frac{d^4 u}{dx^4} [H(x) - H(x-l)] + P_i \frac{d^2 u}{dx^2} [H(x) - H(x-l)] - \\ &- EI n \frac{d^3 Q_x}{dx^3} [H(x) - H(x-l)] + Q(x)\delta(x) - \\ &- Q(x)\delta(x-l) + M(x)\delta'(x) - M(x)\delta'(x-l) + \\ &+ EI\phi(x)\delta''(x) - EI\phi(x)\delta''(x-l) + \\ &+ EIu(x)\delta'''(x) - EIu(x)\delta'''(x-l) + \\ &+ P(\phi(x)\delta(x) - \phi(x)\delta(x-l)) + \\ &+ u(x)\delta'(x) - u(x)\delta'(x-l) - \\ &- EI n(Q(x)\delta''(x) - Q(x)\delta''(x-l) + \\ &+ Q'(x)\delta'(x) - Q'(x)\delta'(x-l)), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{where } n = \frac{k}{GA}. \quad (6)$$

In the equation (5) the feature of delta-function is used:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-t)dx = f(t). \quad (7)$$

The impact of prestressing reinforcement on the beam can be represented in the form of bending moments  $m$ , applied at the breakage of armature and longitudinal compressive force  $P$ .

Let's denote the right side of the equation (5), which is a generalized load  $S(x)$ , and  $\frac{P_i}{EI} = K_i^2$ , then:

$$\frac{d^4 U}{dx^4} + K_i^2 \frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{S(x)}{EI}. \quad (8)$$

Let's apply Fourier transform to both sides of the equation:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{d^4 U}{dx^4} + K^2 \frac{d^2 U}{dx^2} \right] e^{ivx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(x)}{EI} e^{ivx} dx. \quad (9)$$

We get [2]:

$$\tilde{U}(v)[v^4 - K^2 v^2] = \frac{\tilde{S}(v)}{EI}, \quad (10)$$

where  $\tilde{U}(v)$  is Fourier image of function  $U(x)$ ;  
 $\tilde{S}(v)$  is Fourier image of generalized load  $S(x)$ ;  
 $v$  is parameter of Fourier transform.

For preparation of the system of equations of the finite element we considered it is necessary to find Fourier image of generalized load [2, 3]:

$$\begin{aligned} \tilde{S}(v) &= q \left( \frac{e^{ivl} - e^{ivl_0}}{iv} \right) + Fe^{ivx_1} + m(-iv)e^{ivx_2} + \\ &+ Q(0) - Q(l)e^{ivl} + M(0)(-iv) - M(l)(-iv)e^{ivl} + \\ &+ EI\phi(0)(-iv)^2 - EI\phi(l)(-iv)^2 e^{ivl} + \\ &+ EIu(0)(-iv)^3 - EIu(l)(-iv)^3 e^{ivl} + \\ &+ P_i(\phi(0) - \phi(l)e^{ivl}) + \\ &+ u(0)(-iv) - u(l)(-iv)e^{ivl} - nEI(Q(l)v^2 e^{ivl} - \\ &- Q(0)v^2 + qiv(e^{ivl} - e^{ivl_0}) + \frac{F}{a} iv(e^{iv(x_1+a)} - e^{iv(x_1-a)})). \end{aligned} \quad (11)$$

Hence this method takes into account the impact of the shift, the concentrated forces should be represented as distributed load acting in the vicinity of the application points of respective concentrated forces. The length of the sections is taken equal to

half the height of the beam cross-section at the site. This must be done only in the term of equation (11), which is responsible for the account of shift under the action of concentrated forces, namely:

$$\frac{F}{a}iv(e^{iv(x_1+a)} - e^{iv(x_1-a)}). \quad (12)$$

From the equation (10) we get:

$$\tilde{U}(v) = \frac{1}{EI} \frac{\tilde{S}(v)}{v^4 - K^2v^2}. \quad (13)$$

Theorem of Paley–Wiener–Schwartz for generalized functions allows to find the unknown, because, according to it,  $U(v)$  function must be integral and, consequently, the numerator is the sum of integral functions that will contain the zeros of the denominator [4, 6].

The following conditions must be met:

$$\tilde{S}(v_j) = 0, \quad j = 1, 3, 4; \quad (14)$$

$$S'(v_j) = 0, \quad j = 2, \quad (15)$$

where  $v_j$  is roots of the expression

$$v^4 - K^2v^2 = 0. \quad (16)$$

Let's find these roots (Pic. 2):

$$v_{1,2} = 0, \quad v_3 = K, \quad v_4 = -K. \quad (17)$$

Substituting these roots in the equation (11), we obtain a system consisting of four equations and describing one final element shown in Pic. 1:

$$\begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} & C_{1,4} & C_{1,5} & C_{1,6} & C_{1,7} & C_{1,8} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} & C_{2,4} & C_{2,5} & C_{2,6} & C_{2,7} & C_{2,8} \\ C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} & C_{3,4} & C_{3,5} & C_{3,6} & C_{3,7} & C_{3,8} \\ C_{4,1} & C_{4,2} & C_{4,3} & C_{4,4} & C_{4,5} & C_{4,6} & C_{4,7} & C_{4,8} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q(0) \\ Q(l) \\ M(0) \\ M(l) \\ \phi(0) \\ \phi(l) \\ u(0) \\ u(l) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & G_{1,3} \\ G_{2,1} & G_{2,2} & G_{2,3} \\ G_{3,1} & G_{3,2} & G_{3,3} \\ G_{4,1} & G_{4,2} & G_{4,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ F \\ m \end{bmatrix}; \quad (18)$$

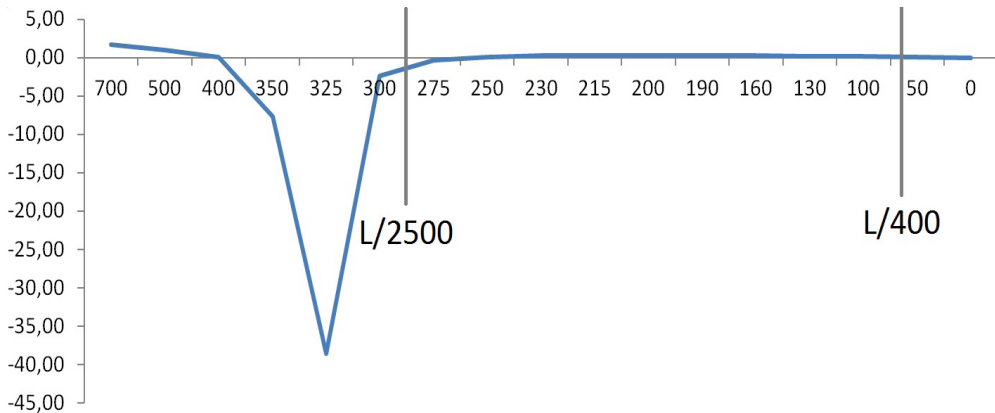
$$\begin{aligned} C_{1,1} &= 1 + nEIv_j^2 \\ C_{2,1} &= 2nEIv_j \\ C_{1,2} &= -e^{ivl} - nEIv_j^2e^{ivl} \\ C_{2,2} &= -ile^{ivl} - 2nEIv_je^{ivl} - nEIv_j^2ile^{ivl} \\ C_{1,3} &= -iv \\ C_{2,3} &= -i \\ C_{1,4} &= ive^{ivl} \\ C_{2,4} &= ie^{ivl} - lve^{ivl} \\ C_{1,5} &= -EIv^2 + P \\ C_{2,5} &= -2EIv \\ C_{1,6} &= EIv^2e^{ivl} - Pe^{ivl} \\ C_{2,6} &= 2EIve^{ivl} + EIv^2ile^{ivl} - Pile^{ivl} \\ C_{1,7} &= EIiv^3 - Piv \\ C_{2,7} &= 3EIiv^2 - Pii \\ C_{1,8} &= -EIiv^3e^{ivl} + Pive^{ivl} \\ C_{2,8} &= -3EIiv^2e^{ivl} + EIiv^3e^{ivl} + Pive^{ivl} - Pive^{ivl} \\ G_{1,1} &= \left(\frac{e^{ivl} - e^{ivl_0}}{iv}\right) + nEIiv(e^{ivl} - e^{ivl_0}) \\ G_{2,1} &= i\frac{e^{ivl} - e^{ivl_0}}{v^2} - i\frac{ile^{ivl} - il_0e^{ivl_0}}{v} + nEI(ie^{ivl} - lve^{ivl} - ie^{ivl_0} + l_0ve^{ivl_0}) \\ G_{1,2} &= e^{ivx_1} \\ G_{2,2} &= ix_1e^{ivx_1} \\ G_{1,3} &= -ive^{ivx_2} \\ G_{2,3} &= -ie^{ivx_2} + vx_2e^{ivx_2}. \end{aligned} \quad (19)$$

The difference between the first, third and fourth equations is only the multiplier  $v_j$ .

Since roots  $v_{1,2}$  are always zero, it is necessary instead of the multiplier at  $q$  to write (20) for the first equation and (21) – for the second:

$$\lim_{v \rightarrow 0} (q \frac{e^{ivl} - e^{ivl_0}}{iv}) = q(l - l_0); \quad (20)$$

$$\lim_{v \rightarrow 0} (qi \frac{e^{ivl} - e^{ivl_0}}{v^2} - qi \frac{ile^{ivl} - il_0e^{ivl_0}}{v}) = qi(\frac{l^2}{2} - \frac{l_0^2}{2}). \quad (21)$$



Pic. 3.





Thus, the system of equations describing a finite element has the form:

$$CU = -GN. \quad (22)$$

Let's compare the results of the calculation of the beam obtained using Midas Civil software system and the method. As an example, we consider a prestressing reinforced concrete beam 50 m long of rectangular cross-section 2x0,3 m on two supports, loaded with distributed load with intensity  $q = 1t / m$  and a concentrated force  $F = 10 t$ , applied at distance  $x_1 = 0,25L$  from the edge of the beam.

In Pic. 3 vertical axis corresponds to a discrepancy in the calculation, expressed as a percentage, and the horizontal axis – longitudinal force in the prestressing reinforcement, expressed in tonnes. If the deflection of the beam tends to zero, the difference reaches significant values. In the graph it can be seen at the site where the longitudinal force is 325 tons. However, it is necessary to take into account that in all other cases, when the deflection is  $u = L / 2500 \div L / 400$ , the difference is not more than half per cent that allows to obtain exact solutions in the calculation of real structures. In addition, it should be noted that the difference in bending moment and shear force at any value of the longitudinal force gives an error of less than one percent.

## II.

When there is no need to consider the longitudinal force, the system of equations takes a much simpler form.

The differential equation of the deflection of the beam:

$$EI \frac{d^4 u}{dx^4} = q(x) + \frac{k}{GA} EI \frac{d^3 Q_x}{dx^3}. \quad (23)$$

After Fourier transform we get:

$$\tilde{U}(v)[v^4] = \frac{\tilde{S}(v)}{EI}; \quad (24)$$

$$\tilde{U}(v) = \frac{1}{EI} \frac{\tilde{S}(v)}{v^4}; \quad (25)$$

$$v^4 = 0. \quad (26)$$

Fourier image of generalized load:

$$\begin{aligned} \tilde{S}(v) = & q \left( \frac{e^{ivl} - 1}{iv} \right) + Fe^{ivx_1} + m(-iv)e^{ivx_2} + Q(0) - \\ & - Q(l)e^{ivl} + M(0)(-iv) - M(l)(-iv)e^{ivl} + \\ & + EI\phi(0)(-iv)^2 - EI\phi(l)(-iv)^2 e^{ivl} + \\ & + Elu(0)(-iv)^3 - Elu(l)(-iv)^3 e^{ivl} - \\ & - nEI(Q(l)v^2 e^{ivl} - Q(0)v^2 + qiv(e^{ivl} - 1)). \end{aligned} \quad (27)$$

Let's find roots of the equation:

$$v_{1,2,3,4} = 0. \quad (28)$$

The following equations should be met:

$$\tilde{S}(v_1) = 0, \quad \tilde{S}(v_2) = 0, \quad \tilde{S}(v_3) = 0, \quad \tilde{S}(v_4) = 0. \quad (29)$$

Matrices C and G get the following form:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -il & -i & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2nEI & l^2 - 2nEI & 0 & -2l & -2EI & 2EI & 0 & 0 \\ 0 & il^3 - 6nEIl & 0 & -3il^2 & 0 & 6EIl & 6EI & -6EIl \end{bmatrix}; \quad (30)$$

$$G = \begin{bmatrix} (1-l_0) & 1 & 0 \\ i \left( \frac{l_0^2}{2} - \frac{l_0^3}{2} \right) & ix_1 & -i \\ \left( \frac{-l^3}{3} + \frac{l_0^3}{3} \right) - 2nEI(1-l_0) & -x_1^2 & 2x_2 \\ i \left( \frac{-l^4}{4} + \frac{l_0^4}{4} \right) - 3inEI(l^2 - l_0^2) & -ix_1^3 & 3ix_2^2 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

This model is useful primarily because there is no need each time to substitute in the matrices C and G values  $v_{1,2,3,4} = 0$ , as in the system of equations (18). The advantage of the model is the fact that the matrix C is tenuous.

## Conclusion.

1. The application of the systems of equations when calculating beam, cable-stayed bridges and extradosed bridges allows to set any type of load without a need to replace them with equivalent loads.

2. The applied method does not require additional partition of structure into finite elements in order to obtain an exact solution when the moment of inertia is constant.

3. Matrix C is the equivalent of stiffness matrix in finite element method is unchanged for all finite elements in a case where there is no longitudinal load. If its account is required, in the matrix should be substituted the values of obtained roots of the equation

$$v_{1,2} = 0, v_3 = \sqrt{\frac{P_i}{EI}}, v_4 = -\sqrt{\frac{P_i}{EI}}.$$

4. In the method of constructing a system of linear equations, focused on a finite element in the frame system, for unknown are taken displacement, rotation angle of the cross section, bending moment and shear force at the ends of the finite element. This allows to immediately find the exact value of these variables without the need for additional calculations.

## REFERENCES

1. Carroll, W. F. A primer for finite elements in elastic structures / Carroll W. F. Weaver & Johnston, 1998, 512 p.
2. Dean, G. D. Advanced Engineering Mathematics / CRC Press, 1997, 656 p.
3. Osgood, B. The Fourier Transform and its Applications / Stanford University, 2009, 428 p.
4. Vladimirov, V. S. Generalized functions in mathematical physics [Obobshhennye funktsii v matematicheskoy fizike]. Moscow, 1979, 320 p.
5. Kurbatsky, E. N. Method of solving problems of structural mechanics and theory of elasticity based on features of Fourier image of finite functions [Metod resheniya zadach stroitel'noj mehaniki i teorii uprugosti, osnovannyj na svoystvah izobrazhenij Fur'e finitnykh funktsij]. D.Sc. (Eng.) thesis. Moscow, 1995, 205 p.
6. Lazaryan, V. A., Konashenko, S. I. Generalized functions in mechanical problems [Obobshhennye funktsii v zadachah mehaniki]. Kiev, Naukova Dumka publ., 1974, 189 p.
7. Timoshenko, S. P. The strength and vibrations of structural elements [Prochnost' i kolebanija elementov konstrukcij]. Moscow, Nauka publ., 1975, 704 p. ●

Information about the author:

**Kosaurov, Artem P.** – Ph.D. student at the department of Bridges and tunnels of Moscow State University of Railway Engineering (MIIT), Moscow, Russia, artpk14@mail.ru.

Article received 14.03.2016, accepted 16.06.2016.